Concursul Național de Matematică și Fizică
Vrânceanu – Procopiu
Bacău, 28 noiembrie, 2015
Barem și rezolvare
Clasa a X-a

Problema 1 10 p

a) **4 p**

Parametrii de stare ai gazelor din cele două compartimente, în stările inițială și finală, fiind cei notați în desenele din figura 1, rezultă:

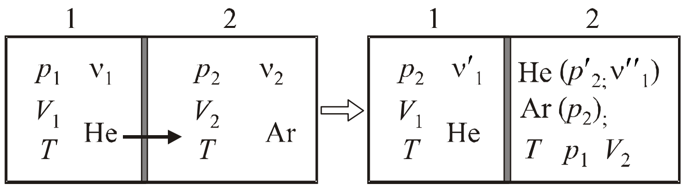


Fig. 1

$$p_1V_1 = \nu_1RT; \quad p_2V_2 = \nu_2RT,$$

unde ν_1 și respectiv ν_2 sunt numerele de moli de He și respectiv de Ar din cele două compartimente, înainte de începerea difuziei moleculelor de He prin membrana semipermeabilă a pistonului;

$$p_2V_1 = \nu'_1RT; \quad p'_2V_2 = \nu''_1RT,$$

unde ν'_1 și respectiv ν''_1 sunt numerele molilor de He din cele două compartimente, iar p'_2 este presiunea parțială a heliului în amestecul din compartimentul 2;

$$p_1 = p_2 + p'_2,$$

unde p_2 este presiunea parțială a argonului în amestecul din compartimentul 2, iar p_1 este presiunea totală a amestecului din compartimentul 2.

Difuzia heliului prin membrană încetează atunci când presiunile heliului din cele două compartimente sunt egale ($p_2 = p'_2$).

Rezultă:

$$p_1 = 2p_2;$$

$$\frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = 2\frac{V_1}{V_2}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}\frac{\nu_1}{\nu_2};$$

$$p'_2V_2 = p_2V_2 = \nu''_1RT = \nu_2RT;$$

$$\frac{p_2V_1}{p_2V_2} = \frac{\nu'_1}{\nu''_1}; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu'_1}{\nu''_2}; \quad \nu''_1 = \nu_2;$$

$$\nu'_1 + \nu''_1 = \nu_1; \quad \nu'_1 = \nu_1 - \nu_2;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\nu'_1}{\nu''_1} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} - 1;$$

$$\nu_1 = 2\nu_2; \quad V_1 = V_2;$$

$$\nu'_1 = \nu_2 = \nu''_1.$$

b) **4p**
Așa cum indică notațiile din figura 2, heliul aflat inițial în compartimentul 1 difuzează prin membrana semitransparentă, în așa fel încât el să ocupe volumul întregului recipient, în ambele compartimente presiunea sa parțială fiind p', astfel încât:

$$pV = p'2V; \quad p' = \frac{p}{2}.$$

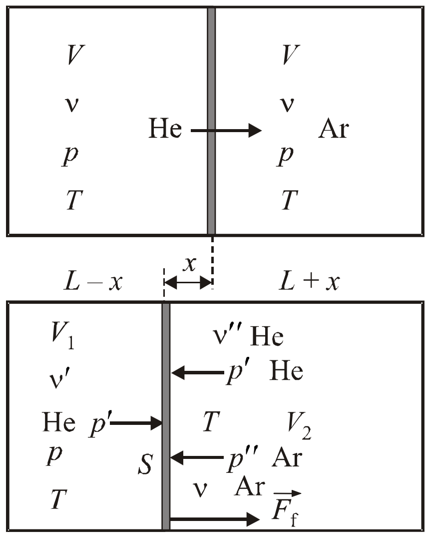


Fig. 2

În aceste condiții, membrana-piston se va deplasa, echilibrul său fiind asigurat atunci când se realizează egalitatea:

$$p''S = F_f,$$

unde p'' este presiunea parțială a argonului, din compartimentul 2, în starea finală;

$$pV = p''V_2;$$

$$p'' = p\frac{L}{L+x};$$

$$pLS = (L + x)F_f;$$

$$x = L\left(\frac{pS}{F_f} - 1\right); \quad 0 < x < L;$$

$$\frac{1}{2}pS < F_f < pS.$$

În plus:

$$x = 0 \text{ pentru } F_f > pS; \; x = L \text{ pentru } F_f \le pS.$$

c) **2p**
Parametrii stărilor inițială și respectiv finală ai sistemului fizic dat fiind cei notați în desenele din figura 3, rezultă:

$$p = p_0\frac{L_0}{L_0 + y};$$

$$pS = ky;$$

$$ky(L_0 + y) = p_0 L_0 S;$$

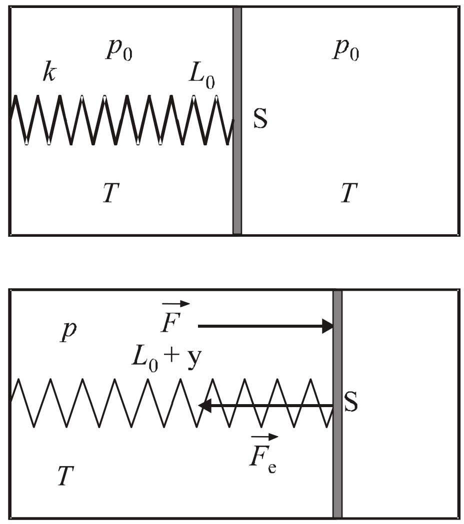


Fig. 3

$$ky^2 + kL_0 y - p_0 L_0 S = 0;$$

$$y = -\frac{L_0}{2} + \sqrt{\frac{L_0^2}{4} + \frac{p_0 L_0 S}{k}};$$

$$W = \frac{ky^2}{2};\ W = \frac{k}{2}\left(\sqrt{\frac{L_0^2}{4} + \frac{p_0 L_0 S}{k}} - \frac{L_0}{2}\right)^2.$$

Problema 2 10 p

Soluție:
Din A în B bila descrie un arc de cerc, iar din B în C pe un arc de parabolă.
Dacă α_0 este unghiul făcut de fir cu verticala, atunci ecuația de mișcare a bilei, scrisă pe direcția radială este

$$ma_{cp} = T + mgcos\alpha_0,$$

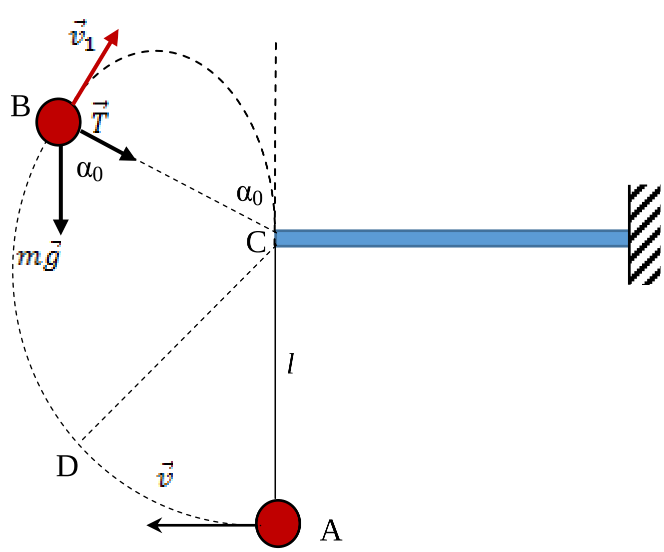
unde

$$a_{cp} = \frac{v_1^2}{l}.$$

Cum în B

$$T = 0,$$

atunci
$v_1^2 = glcos\alpha_0.$
Scriind legea conservării energiei mecanice între punctele A și B



$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mg\,(l + l cos\alpha_0),$$

de unde

$$v^2 = gl(2 + 3cos\alpha_0).$$

Pentru partea a doua a traiectoriei bilei se poate scrie

$y_C = y_B + \Delta x \cdot tg\,\alpha_0 - \frac{g}{2}\frac{(\Delta x)^2}{v_1^2 cos^2\alpha_0},$

unde

$y_B = y_C + l cos\alpha_0$

și

$\Delta x = l sin\alpha_0.$

Prin urmare

$$tg\alpha_0 = \sqrt{2} \text{ sau } cos\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

În concluzie

$$v = \sqrt{gl\left(2 + \sqrt{3}\right)}.$$