Concursul Național de Matematică şi Fizică

"Vrănceanu – Procopiu"

Ediția a XVII –a, 2015

XI

Problema I (10 puncte)

Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C}) \setminus \{O_2\}$ astfel încât $AB + BA = O_2$ şi $\det(A+B) = 0$. Arătați că $TrA = TrB = 0$ (unde TrX este *urma* matricei *X*, adică suma elementelor de pe diagonala principală a lui *X*).

Soluție.

Avem că $(A+B)^2 = (A-B)^2 = A^2 + B^2$ şi de aici rezultă că $\det(A+B) = \det(A-B) = 0$. **(3p)**

Teorema Hamilton-Cayley aplicată pentru $A+B$ şi $A-B$ duce la $(Tr(A+B))(A+B) = (Tr(A-B))(A-B)$ **(2p)**

şi, de aici, $(TrA + TrB)^2 = (TrA - TrB)^2$, prin urmare $TrA \cdot TrB = 0$. **(2p)**

Rezultă că $TrA = 0$ sau $TrB = 0$, iar de aici se arată imediat că $TrA = TrB = 0$. **(2p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir strict crescător de numere naturale. Demonstrați că şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $y_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i!}$ este convergent, având ca limită un număr irațional.

Soluție.

Deoarece $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{x_{n+1}!} > 0$, şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător. **(1p)**

Apoi, $y_n \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{x_n!} < e$, aşadar $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior; rezultă că $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent. **(2p)**

Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}$; presupunem, prin reducere la absurd, că $l = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, unde $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$. Avem:

$$y_{n+q} - y_q = \frac{1}{x_{q+1}!} + \frac{1}{x_{q+2}!} + \ldots + \frac{1}{x_{q+n}!} \le \frac{1}{x_{q+1}!}\left(1 + \frac{1}{x_{q+1}+1} + \frac{1}{(x_{q+1}+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x_{q+1}+1)^{n-1}}\right) = \frac{1}{x_{q+1}!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{x_{q+1}+1}\right)^n}{1 - \frac{1}{x_{q+1}+1}}. \textbf{ (2p)}$$

Pentru $n \to \infty$, obținem că $l - y_q \le \frac{1}{x_{q+1}!} \frac{x_{q+1}+1}{x_{q+1}} < \frac{1}{x_q! \cdot x_q}$. De aici, $0 < lx_q! - y_q x_q! < \frac{1}{x_q} < 1$, relație care nu poate fi adevărată, deoarece $lx_q! - y_q x_q! \in \mathbb{N}$. Astfel, presupunerea făcută este falsă, prin urmare $l \notin \mathbb{Q}$. **(4p)**