MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINȚIFICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU

COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică şi Fizică

"Vrănceanu – Procopiu"

Ediția a XVII –a, 2015

XII

Problema I (10 puncte)

Determinați funcțiile derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f'(x)=(f(x)-1)^2, \forall x\in\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

Soluție.

Prima condiție din enunț arată că $f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, prin urmare funcția *f* este crescătoare pe $\mathbb{R}$. Deducem că $f(x)\geq \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$. **(2p)**

Dacă, prin absurd, am avea $f(x)>1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $\dfrac{f'(x)}{(f(x)-1)^2}=1, \forall x\in\mathbb{R}$. Integrând ambii membri, rezultă că există $c\in\mathbb{R}$ pentru care $-\dfrac{1}{f(x)-1}=x+c, \forall x\in\mathbb{R}$. Pentru $x=-c$, obținem o contradicție. **(3p)**

Prin urmare, există $x\in\mathbb{R}$ cu $f(x)=1$; presupunem că există *a* maxim cu această proprietate. Pentru $x\leq a$, $1=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\leq f(x)\leq f(a)=1$, deci $f(x)=1$. Pentru $x>a$, avem că $f(x)>1$ şi, ca mai sus, $f(x)=1-\dfrac{1}{x+c}$, unde $c\in\mathbb{R}$. Funcția $f(x)=\begin{cases}1 & , x\leq a\\ 1-\dfrac{1}{x+c} & , x>a\end{cases}$ nu este derivabilă în $x=a$, deci ajungem la o contradicție. **(3p)**

Rămâne că $f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$ şi această funcție verifică cele două condiții din enunț. **(1p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Fie $(G,\cdot)$ un grup. Spunem că un element *a* al lui *G* are proprietatea (P) dacă există numerele naturale nenule şi distincte *m* şi *n* astfel încât $a^{2^{2^m}}=a^{2^{2^n}}=a^{-1}$. Determinați elementele lui *G* cu proprietatea (P).

Constantin Cocea

Soluție.

Evident, elementul neutru *e* al grupului are proprietatea (P). Vom arăta că $a=e$ este singurul element cu proprietatea (P). **(1p)**

Scriem condiția din enunț sub forma $a^{F_m}=a^{F_n}=e$, unde $F_n=2^{2^n}+1$. Rezultă că elementul *a* are ordin finit, ordinul său fiind divizor comun al numerelor F_m şi F_n. **(3p)**

Cum numerele naturale nenule *m* şi *n* sunt distincte, numerele F_m şi F_n sunt relativ prime. Într-adevăr, fie $m<n$ şi $d=(F_m,F_n)$. Deoarece

$$2^{2^n}-1=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}+1\right)\ldots\left(2^{2^1}+1\right)\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^0}-1\right)\Leftrightarrow F_n-2=F_{n-1}\cdot F_{n-2}\cdot\ldots\cdot F_1\cdot F_0,$$

rezultă că F_m este divizor al lui F_n-2. Atunci $d\,|\,F_n-2$, deci $d\,|\,2$ şi, deoarece *d* este impar (la fel ca F_m şi F_n), obținem că $d=1$. **(4p)**

Deducem astfel că *a* este element de ordin 1 şi cu aceasta soluția problemei este completă. **(1p)**