MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI BACĂU

COLEGIUL NAŢIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Naţional de Matematică şi Fizică

"Vrănceanu – Procopiu"

Ediţia a XVII –a, 2015

X

Problema I (10 puncte)

Fie numerele realea,b,c astfel încât 1 < a < b < c.
Să se arate că $\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0$.
Soluţie.
Observăm că dacă $1 < p < q$ și $x > 1$, atunci $\log_p x > \log_q x$, (4p)
Din 1 < a < b < c., putem scrie că $b = a^u$ și $c = b^v$, cu u, v > 1. Se obține imediat și că
$c = a^{uv}$, sau că $a = c^{\frac{1}{uv}}$
Atunci sum dată, $S = \log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) = \log_a u + \log_b v + \log_c \frac{1}{uv} = (\log_a u - \log_c u) + (\log_b v - \log_c v)$ (3p)
Conform primei observații, fiecare paranteză este strict pozitivă, de unde S > 0. (1p)
Sau, tot cu prima observatie, $S > \log_c(\log_a b) + \log_c(\log_b c) + \log_c(\log_c a) =$
$= \log_c((\log_a b)\cdot(\log_b c)\cdot(\log_c a)) = \log_c 1 = 0$ (5p)

Problema a II-a (10 puncte)

Fie a,b,c trei numere complexe nenule care verifică egalitățile :
$a(a + b) = r_1$, (1) ; $b(b + c) = r_2$, (2) ; $c(c + a) = r_3$, (3), unde r_1, r_2, r_3 sunt numere reale strict pozitive.

a) Să se arate că dacă a,b,c sunt trei numere care verifică relațiile date, atunci și –a,-b,-c verifică relațiile (1), (2), (3).
b) Să se arate că dacă a,b,c verifică relațiile (1), (2), (3), atunci a,b,c sunt toate trei numere reale.

Soluţie.

a) Evident, prin înlocuirea valorilor a, b, c cu –a, -b, -c. (2p)
b) Presupunem, prin absurd, pentru început, că toate trei numerele a, b, c $\in$ **C** \ **R**.
Atunci argumentele lor sunt în intervalele (0, π) sau (π, 2π). Atunci, conform principiului cutiei există două argumente fie în (0, π), fie în (π, 2π). (1p)
Dacă două dintre argumente ar fi în intervalul (π, 2π), (de exemplu arg(a), arg(b)), atunci arg(-a), arg(-b) $\in$ (0, π), iar –a, -b sunt și ele soluții, deci, cel puțin două din argumentele numerelor a,b,c se află în intervalul (0, π). (2p)
Folosind reprezentarea geometrică a numerelor complexe, observăm că argumentul sumei a două numere complexe se află între argumentele termenilor sumei. (2p)
Atunci arg(a), arg(b), arg(a+b) $\in$ (0, π), deci arg(a(a+b)) $\in$ (0, 2π), fals, deoarece a(a+b) este real.
Deci cel puțin unul din numerele a,b,c este real. (2p)
Dar, dacă a $\in$ **R**, atunci și a+b $\in$ **R**, deci b $\in$ **R**. Apoi, din b(b+c) $\in$ **R** și b $\in$ **R**, avem b+c $\in$ **R**, deci și c $\in$ **R**.
Deci toate cele trei numere sunt reale. (1p)