MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINȚIFICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU

COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică şi Fizică

"Vrănceanu – Procopiu"

Ediția a XVII –a, 2015

IX

Problema I (10 puncte)

Determinați numerele reale x pentru care $\dfrac{x^2-2}{x+3}$ şi $\dfrac{x^2+8x+1}{3x+2}$ sunt, simultan, numere raționale.

Soluție.

Pentru orice $x \in \mathbb{Q} \setminus \left\{-3, -\dfrac{2}{3}\right\}$, numerele din enunț sunt raționale. **(3p)**

În continuare, fie $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a = \dfrac{x^2-2}{x+3}$ şi $b = \dfrac{x^2+8x+1}{3x+2}$. Se obține că $x^2 - 2 = ax + 3a$ şi $x^2 + 8x + 1 = 3bx + 2b$, de unde, prin scădere, $8x + 3 = x(3b - a) + 2b - 3a$. Rezultă, în mod necesar, că $3b - a = 8$ şi $2b - 3a = 3$, prin urmare $a = 1$ şi $b = 3$. **(4p)**

Înlocuind, avem că $x^2 - x - 5 = 0$, deci $x \in \left\{\dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$. În concluzie, $x \in \left(\mathbb{Q} \setminus \left\{-3, -\dfrac{2}{3}\right\}\right) \cup \left\{\dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}\right\}$. **(2p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Se consideră octogonul regulat $ABCDEFGH$ şi punctul $\{P\} = HE \cap FD$. Determinați numerele reale m şi n cu proprietatea că $\overrightarrow{HP} = m \cdot \overrightarrow{HG} + n \cdot \overrightarrow{FE}$.

Dorel Luchian şi Gabriel Popa

Soluție.

Se arată că triunghiul HFD este dreptunghic isoscel, iar HE.este bisectoarea unghiului $\sphericalangle FHD$. **(3p)**

Conform teoremei bisectoarei, $\dfrac{FP}{PD} = \dfrac{HF}{HD} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ şi, de aici, $\overrightarrow{HP} = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\overrightarrow{HF} + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\overrightarrow{HD}$. **(3p)**

Pe de altă parte, $\overrightarrow{HF} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\overrightarrow{HG} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{FE}$ şi $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HG} + \left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{FE}$. Înlocuind în relația precedentă, deducem că $\overrightarrow{HP} = \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{HG} + \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{FE}$, adică $m = n = \sqrt{2}$. **(3p)**